

TD Fonctions de plusieurs variables

Topologie

KOH Exercice 1

1. Montrer que l'intersection de deux ouverts de \mathbb{R}^n est un ouvert.
2. Montrer que si $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, la boule ouverte euclidienne $B_2(a, r)$ est convexe.

7RI Exercice 2 Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe et $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(C)$ est un intervalle.

DAL Exercice 3 ★ PROPRIÉTÉ DE BOREL-LEBESGUE DANS \mathbb{R} Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement $[0, 1]$ par des intervalles ouverts, c'est-à-dire une famille d'intervalles d'ouverts de \mathbb{R} telle que $[0, 1] \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Montrer qu'il existe un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire une partie finie $J \subset I$ telle que $[0, 1] \subset \bigcup_{i \in J} O_i$. **Ind** : Considérer $\alpha = \sup\{a \mid [0, a] \text{ admet un recouvrement fini}\}$.

HMQ Exercice 4 ★ Soit X une partie convexe et dense dans \mathbb{R}^n . Montrer que $X = \mathbb{R}^n$. Contre-exemple en dimension infinie ?

DQY Exercice 5 ★ [ENS] Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f([a, b])$ soit un segment, pour tout $a \leq b$ et $f^{-1}(\{x\})$ soit fermé pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue.

Continuité

N5Y Exercice 6 Montrer que les fonctions suivantes sont continues en $(0, 0)$.

$$1. f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq \vec{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2. g: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq \vec{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 3. h: (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3y^4}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq \vec{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

QDY Exercice 7 Donner un exemple d'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. les applications partielles $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ soient continues mais f ne soit pas continue en $(0, 0)$.
2. f admette en $(0, 0)$ des dérivées suivant tout vecteur, mais n'est pas continue en $(0, 0)$.
3. les applications $x \mapsto f(x, b)$ et $y \mapsto f(a, y)$ soient continues pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, mais f ne soit pas continue.

Indication : Considérer $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ et $f(0, 0) = 0$.

ELI Exercice 8 ★ OPÉRATEUR INTÉGRAL [X] Soient $K: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continues telles que

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \int_0^1 f(y)K(x, y) dy \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^1 g(y)K(x, y) dy.$$

Montrer que $f = g$.

Indication : Considérer $\sup \frac{f}{g}$.

Dérivées partielles

ON1 Exercice 9 Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que $h: (x, y) \mapsto f(2xy, x)$ est de classe \mathcal{C}^1 , et donner ses dérivées partielles.

779 Exercice 10 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $x, h \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $g(t) = f(x + th) = f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n)$. Donner une expression de $g'(t)$, d'une part en termes des dérivées partielles de f , d'autre part en termes du gradient de f .

WQE Exercice 11 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement si $\forall t, x, y \in \mathbb{R}, f(x+t, y+t) = f(x, y)$.

CX4 Exercice 12 Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y \sin x & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 13 Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Calculer les dérivées partielles de

$$1. f: (x, y) \mapsto \int_0^y (x-t)\varphi(t) dt \quad 2. g: (x, y) \mapsto \int_{x-y}^{x+y} \sin(x-t)\varphi(t) dt$$

SFD Exercice 14 ★ UNICITÉ AU PROBLÈME DE DIRICHLET On considère des fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur le disque unité ouvert de \mathbb{R}^2 et continue sur le disque fermé. On définit le laplacien par $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

1. On suppose que $\Delta f > 0$ et que f est nulle sur le cercle unité, montrer que $f \leq 0$ sur le disque.
2. On suppose f_1, f_2 coïncident sur le cercle unité et vérifient $\Delta f_1 = \Delta f_2$, montrer que $f_1 = f_2$. **Ind.** : Étendre Q1 à $\Delta f \geq 0$.

Gradient

JN1 Exercice 15 Soit I, J des intervalles et $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que $\sup \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq K$ et $\sup \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$. Montrer que f est lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe M tel que $\forall \vec{u}, \vec{v}, |f(\vec{u}) - f(\vec{v})| \leq M \|\vec{u} - \vec{v}\|_2$. Quelle est la constante M optimale ?

Indication : Introduire une fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $g(0) = f(\vec{u})$ et $g(1) = f(\vec{v})$.

567 Exercice 16 UN LEMME DE ROLLE Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le disque unité fermé de \mathbb{R}^2 , et de classe \mathcal{C}^1 sur le disque unité ouvert U . On suppose que f est identiquement nulle sur le cercle unité. Montrer qu'il existe $a \in U$ tel que $\text{grad } f(a) = \vec{0}$.

YES Exercice 17 ★ Soit S et B la sphère unité et la boule unité fermée de \mathbb{R}^n . On considère g de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n et $x \in S$.

1. On suppose que $g(x) = \max\{g(y), y \in B\}$. Montrer que $\langle \text{grad } g(x), x \rangle \geq 0$.
2. On suppose que $g(x) = \max\{g(y), y \in S\}$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\text{grad } g(x) = \lambda x$.

ZCF **Exercice 18** ♣ Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, C^1$. On dit que f est convexe si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

1. Soit $x, y \in E$, et $g_{x,y}: t \in \mathbb{R} \mapsto f(x + ty)$. Montrer que si f est convexe, alors $g_{x,y}$ est convexe.

Réciproquement, on admet que si toutes les fonctions $g_{x,y}$ sont convexes, f est convexe.

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes à la convexité de f .

(i) $\forall x, y \in E, f(x + y) \geq f(x) + \langle \text{grad } f(x), y \rangle$.

(ii) $\forall x, y \in E, \langle \text{grad } f(y) - \text{grad } f(x), y - x \rangle \geq 0$.

3. Montrer que si f est convexe et admet un extremum local en a , alors celui-ci est global.

4. On suppose que f est strictement convexe et que $\frac{f(x)}{\|x\|} \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

a) Montrer que f atteint sa borne inférieure en un unique point.

b) Montrer que l'application $x \mapsto \text{grad } f(x)$ est bijective.

EDP

POH **Exercice 19** Déterminer les fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 telles que

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y$

IAL **Exercice 20** ✂ On dit que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est α -homogène si $\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$.

1. Montrer que si f est de classe C^1 et α -homogène, alors $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$. (*)

2. Montrer que si f est de classe C^1 et vérifie (*), elle est α -homogène.

YGB **Exercice 21** ✂ On pose $\Delta = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Soit $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant (E): $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

1. Interpréter géométriquement (E) en considérant, en $M = (x, y)$, les vecteurs $\text{grad } f(M)$ et \overrightarrow{OM} .

2. En posant $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, montrer qu'il existe une fonction $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \Delta, f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$. Montrer que φ est de classe C^1 . Étudier la réciproque.

DT8 **Exercice 22** PROPAGATION DES ONDES LINÉAIRES

1. Soit $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 . On suppose que $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$. Montrer qu'il existe deux fonctions $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\forall u, v \in \mathbb{R}, F(u, v) = g(u) + h(v)$.

2. Soient $c > 0$ et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On considère l'équation (E): $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$. En utilisant un changement de variable, montrer que si f vérifie (E), il existe $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, t \in \mathbb{R}, f(x, t) = g(x + ct) + h(x - ct).$$

3. Déterminer les solutions de (E) de la forme $f(x, t) = F(x)G(t)$, où F et G sont des fonctions bornées, non identiquement nulles, et telles que $\forall x, f(x, 0) = 0$ et $\forall t, f(0, t) = 0$.

Extrema et géométrie

PVV **Exercice 23** ✂ Soit $f: (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$

1. Déterminer les points critiques de f . 2. $(0, 0)$ est-il un extremum local? 3. Montrer que f n'admet pas d'extrema.

RQE **Exercice 24** 1. Soit $a \in]0, \pi[$ vérifiant $\cos(a) + \cos(2a) = 0$. Montrer que $a = \frac{\pi}{3}$.

2. Déterminer avec soin les extrema de la fonction $f: x, y \mapsto \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ sur $K = [0, \pi]^2$.

3. En déduire la valeur maximale du périmètre d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r .

6J0 **Exercice 25** ✂ Soit ABC un triangle du plan. On considère $f: M \mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2$.

1. Déterminer $\text{grad } f(M)$. 2. Montrer que f admet un minimum, atteint en un unique point, à déterminer.

BK0 **Exercice 26** Soit $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

1. Déterminer les points critiques de f . 2. Montrer que f n'admet pas d'extremum local sur \mathbb{R}^2 .

X3U **Exercice 27** Soit $f: (x, y) \mapsto \sin x \sin y \sin(x + y)$.

1. Montrer que f admet un maximum sur \mathbb{R}^2 . 2. Déterminer ce maximum.

K6N **Exercice 28** [X MP 2023] On munit \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne canonique. On considère le carré de coins $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. On choisit trois points A, B et C sur ce carré.

1. Montrer qu'il existe une disposition des points A, B et C maximisant l'aire du triangle ABC .

2. Caractériser une telle disposition.

Ind : À partir d'une telle disposition, étudier l'effet d'une petite modification.

1GL **Exercice 29** ★ [MINES 2022] Soit $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est continue.

2. Extrema de f .

ZTR **Exercice 30** ★ PREUVE DIFFÉRENTIELLE DU THÉORÈME SPECTRAL Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $h: X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \mapsto \frac{\langle AX, X \rangle}{\|X\|_2^2}$.

1. Montrer que h admet un maximum ou un minimum.

2. En déduire que S admet une valeur propre : il existe $X \neq \vec{0}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $SX = \lambda X$.